**2 אולטרה פילטר**

**2.1 הגדרה (**פילטר):

יהי קבוצה ויהי אוסף לא ריק של תת קבוצות של , הוא **פילטר** (filter) על , אם ורק אם:

1. לכל , .
2. אם אזי
3. אם וגם אזי .

**2.2 הגדרה** – בסיס של פילטר:

*יהי פילטר על* **,** תת-אוסף הוא **בסיס** של הפילטר , אם ורק אם לכל קיים כך ש- .

אוסף הוא **בסיס-פילטר***(*filter base*) על , אם ורק אם קיים פילטר על אשר הוא הבסיס שלו.*

**2.3 משפט**

אוסף של תת-קבוצות של קבוצה הוא בסיס-פילטר על , *אם ורק אם הוא אוסף* ***לא ריק*** *של קבוצות* ***לא ריקות****, ולכל יש כך ש-* .

הוכחה:

**כיוון אחד:** נניח ש-הוא בסיס-פילטר על ויהי הפילטר על אשר בסיס שלו. , לכן יש  *כך ש- ומכאן ש- .  
 לכן כל מקיימת .  
אם אזי , לכן ומכך ש- הוא בסיס של נובע: יש כך ש-.*

***כיוון שני:*** *יהי אוסף העונה על דרישות המשפט. נסמן ב- את אוסף הקבוצות המכילות איזשהו איבר של .  
נוכיח ש- הוא פילטר (ואז הוא הבסיס שלו)  
 ו- . לכן .*

1. *לכל יש כך ש-. , לכן .*
2. *תהיינה . יש כך ש- . לכן . ב- יש כך ש-. לכן . ולכן על פי הגדרת , .*
3. *תהי ותהי . יש כך ש-. לכן בודאי ומכאן ש .*

*מש"ל.*

**2.4 הגדרה** – אולטרה-פילטר(ultra filter):

פילטר על קבוצה הוא אולטרה-פילטר אם ורק אם אין שום פילטר על המכיל ממש את .

ניתן להגיד אם כן כי אולטרה-פילטר הוא פילטר מקסימלי.

***2.5 טענה***

*יהי פילטר על , אולטרה פילטר על אם ורק אם לכל בדיוק אחת מבין שייכת ל .*

*הוכחה:*

***כוון אחד****: נניח כי אולטרה פילטר, ותהי . ברור שלכל היותר אחת מבין שייכת לכי אילו שתיהן היו ב היה מתקיים*  אבל .

כדי להוכיח שלפחות אחת בשתיהן שייכת ל, נסתכל בשני האוספים האלה:

*אם וגם אזי יש כך ש-*  ויש כך ש .

*וגם לכן* וזה לא יתכן כי (ובפילטר אין קבוצות ריקות).

לפיכך לפחות לאחד מבין האוספים , *אינה שייכת.*

*נאמר ללא הגבלת כלליות ,*

*ולכן ו- לכן .*(\*)

הוא, אם כן, אוסף לא ריק, של קבוצות לא ריקות, וברור שהחיתוך של כל שתי קבוצות מתוכו נמצא בו. לכן הוא בסיס של פילטר שיסומן .

כי אם אזי לכן (כי ).

הוא אולטרה פילטר, לכן מכך ש- נובע כי .

מ(\*) נקבל כי *, ולכן .*

***כוון שני:*** *נניח שלכל אחת מבין נמצאת ב* *.*

*אילו היה פילטר , המכיל ממש את היתה קיימת קבוצה , כך ש , וגם . לפי ההנחה, מכך ש- נובע , ומאחר ש אזי . זה לא יתכן כי גם ולכן . ולכן אולטרה פילטר.*

**2.6 טענה**

תהי ונסמן ב- את הפילטר . אזי  *הינו אולטרה פילטר אם ורק אם A הינו סינגלטון.*

*הוכחה:*

***כיוון אחד****: נניח ש- . אזי . יהי איזשהו פילטר על שעבורו ונוכיח ש- .*

*תהי . אם אזי , לכן .*

*מאחר ש- . לפיכך וזה לא יתכן. לפכיך לכל מתקיים , לכן , ומכאן ש- .*

*הראינו ששום פילטר על אינו מכיל ממש את , לכן הוא אולטרה פילטר.*

***הכיוון האחר****: נניח ש-A אינה סינגלטון, נבחר ונסתכל בפילטר*

*אם אזי לכן , לכן .*

*הוכחנו אם כן, .*

*יתר על כן: אבל*  (כי  *)*

*לכן* .

לפיכך אינה אולטרה פילטר.

**2.7 הגדרה** – אולטרה-פילטר ראשי(principal ultra filter):

יהי ***,*** *האולטרה פילטר*

יקרא אולטרה-פילטר - ראשי.

**2.8 טענה**

יהי אולטרה-פילטר **שאינו ראשי** על , ויהי , אזי  *אינסופי.*

*הוכחה:*

*נניח בשלילה כי סופי, ז"א ש - כאשר n טבעי וסופי.*

*נוכיח באינדוקציה על n כי קיים כך ש- . ובכך נגיע לסתירה להנחה.*

*עבור הטענה ברורה הסניגלטון הרי הוא .*

*נניח נכונות עבור ונוכיח עבור .*

אינו ראשי ולכן *.* ולכן קיים וקיים כך ש- . אבל מצד שני  *פילטר ולכן . אבל מכך ש- אזי ולכן הנחת האינדוקציה תקפה עבור .*

*ולכן קיים כך ש- , בסתירה לכך ש אינו סינגלטון. ולכן הנחת השלילה שגויה.*

*ולכן אינסופית.*

***2.9 משפט***

*כל פילטר על מוכל באולטרה-פילטר על .*

*הוכחה:*

*יהי פילטר על ונסתכל במשפחה של כל הפילטרים על , המכילים את .*

*(). סדורה חלקית על-ידי ההכלה.*

*תהי*  שרשרת מתוך , דהיינו משפחה לא ריקה של פילטרים המכילים את , שהיא סדורה לינארית על ידי ההכלה.

יהי *.*

*נוכיח ש- הוא חסם מלעיל של . ב- . ברור שלכל* , לכן, כל שעלינו להראות הוא ש- הוא פילטר המכיל את .

אכן, אינו ריק( אינה ריקה ולכל אינו ריק כי הוא פילטר). כמו כן,

1. לכל יש כך ש- ולכן .
2. אם אזי יש שעבורו ויש שעבורו . אחד מבין מכיל את האחר(כי  *שרשרת* ). אותו אחד מכיל הן את הן את לכן הוא מכיל את ולכן .
3. אם אז יש , כך ש . לכן אם אז ולכן .   
   לפיכך הוא פילטר. כי לכל .

*מאחר שלכל שרשרת ב- יש חסם מלעיל, הרי שלפי הלמה של צורן יש במשפחה איבר מקסימלי. נראה שאיבר כזה הוא אולטרה פילטר על , המכיל את .*

*יהי איבר מקסימלי של . מכך ש- נובע ש- הוא פילטר המכיל את . נוכיח ש- הוא אולטרה פילטר: אם אזי , לכן . מן המקסימליות של ב- נובע אפוא:*  . מש"ל.

***2.10 הגדרה – התכנסות פילטר***

*יהי*  פילטר על העולם של מרחב טופולוגי ותהי נאמר שהפילטר **מתכנס** ל במרחב ושהנקודה היא **גבול** של אם ורק אם מכיל את פילטר הסביבות (כלומר אם ורק אם כל סביבה של שייכת לפילטר). כאשר מתכנס ל נרשום

***2.11 משפט***

*מרחב טופולוגי הוא מרחב האוסדורף אם ורק אם לכל פילטר מתכנס על יש גבול יחיד.*

*הוכחה:*

***כיוון אחד:*** *נניח ש- הוא מרחב האוסדורף ויהי פילטר על המקיים וגם .*

*פירושו , פירושו .  
לפיכך אם הן איזשהן סביבות של בהתאמה, אז , לכן ומכאן ש- . מכך נובע, שבהכרח שכן במרחב האוסדורף לכל שתי נקודות שונות יש סביבות שונות זרות.*

***כיוון שני:*** *נניח שלכל פילטר מתכנס על יש גבול יחיד. תהיינה נקודות שונות ב-, ונניח בשלילה שאין להן סביבות זרות. אז לכל ולכל , , ואז לפי משפט(*לפי 2.3*), האוסף*  הוא בסיס פילטר על .  
יהי הפילטר שקובע , מכיל את (כי ולכל , ). מכיל גם את (מאותו נימוק). לכן . לפיכך וגם והגענו לסתירה. לכן, לכל יש סביבות שעבורן *,* כלומר הוא מרחב האוסדורף.

***2.12 משפט***

*התאמה רציפה בנקודה , אם ורק אם לכל פילטר על המקיים פילטר התמונה, , שהוא הפילטר על שבסיסו הוא אוסף הקבוצות מהטיפוס כאשר , מקיים*

*הוכחה:*

***כיוון אחד:*** *נניח ש- רציפה ב- ויהי פילטר על המקיים .  
תהי סביבה של ב-.  
בשל הרציפות של ב- קיימת סביבה של ב- כך ש-. (כי ) לכן שייכת לפילטר התמונה , ולכן . בזאת הוכח שב-,*  לכן .

**הכיוון האחר:** *נניח שכל אימת ש , . מאחר ש-* , הרי ש  
 . פירוש הדבר הוא שכל סביבה של מכילה את התמונה של איזושהי סביבה של . לכן רציפה ב-.